

Kesan Nanozarah Hibrid terhadap Aliran Bendalir Eyring-Powell pada Permukaan Mengecut

(Hybrid Nanoparticles Effects on the Flow of a Eyring-Powell Fluid Past a Shrinking Sheet)

ISKANDAR WAINI¹, FARAH NADZIRAH JAMRUS², ANUAR ISHAK^{3*} & IOAN POP⁴

¹Fakulti Teknologi dan Kejuruteraan Industri dan Pembuatan, Universiti Teknikal Malaysia Melaka, Hang Tuah Jaya, 76100 Durian Tunggal, Melaka, Malaysia

²Kolej Pengajian Pengkomputeran, Informatik dan Matematik, Universiti Teknologi MARA, Cawangan Melaka Kampus Jasin, 77300 Merlimau, Melaka, Malaysia

³Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Technology, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia

⁴Department of Mathematics, Babes-Bolyai University, 400084 Cluj-Napoca, Romania

Diserahkan: 30 April 2024/Diterima: 6 September 2024

ABSTRAK

Kesan nanozarah hibrid terhadap aliran bendalir Eyring-Powell pada permukaan mengecut dengan halaju hukum kuasa dikaji. Penjelmaan keserupaan yang sesuai digunakan untuk mengubah persamaan menakluk kepada persamaan keserupaan. Penyelesai masalah nilai sempadan `bvp4c` dalam perisian MATLAB digunakan untuk mendapatkan penyelesaian berangka. Hasil kajian mendapati bahawa nanozarah hibrid meningkatkan kedua-dua kecerunan halaju dan suhu, yang seterusnya meningkatkan geseran pada permukaan dan kadar pemindahan haba masing-masing pada 5.01% dan 0.59% berbanding bendalir asas. Namun, kuantiti fizikal tersebut menurun dan domain penyelesaiannya terjejas dengan kehadiran parameter bendalir Eyring-Powell. Daripada analisis kestabilan, hanya satu daripada dua penyelesaian tersebut stabil dalam jangka masa panjang.

Kata kunci: Analisis kestabilan; Eyring-Powell; nanobendalir hibrid; penyelesaian dual; permukaan mengecut

ABSTRACT

The effect of hybrid nanoparticles on Eyring-Powell fluid flow over a shrinking sheet with power-law velocity is studied. The suitable similarity transformations are used to transform the governing equations into the similarity equations. The `bvp4c` solver in MATLAB software is employed to generate the numerical results. The outcomes show that the hybrid nanoparticles raise both the velocity and temperature gradients, which consequently increases the friction at the surface and the rate of heat transfer by 5.01% and 0.59%, respectively, compared with the base fluid. However, these physical quantities are reduced, and the domain of the solutions is affected in the presence of the Eyring-Powell fluid parameters. From the stability analysis, only one of the solutions is stable in the long run.

Keywords: Dual solutions; Eyring-Powell; hybrid nanofluid; shrinking sheet; stability analysis

PENDAHULUAN

Bendalir yang bersifat tak Newtonian dengan ciri berbeza seperti kelikatan bergantung pada kadar ricih dan tegasan sering digunakan dalam industri pembuatan. Model bendalir ini dikelaskan berdasarkan ciri tertentu seperti penebalan ricih (dilatan) atau penipisan ricih (pseudoplastik). Bendalir penebalan ricih merupakan bendalir yang kekekatannya meningkat apabila dikenakan kadar ricih yang tinggi manakala bendalir penipisan ricih menunjukkan kelakuan bendalir Newtonian apabila kadar ricihnya mempunyai nilai yang sangat rendah atau tinggi. Disebabkan oleh kesesuaian bendalir ini dalam aplikasi industri termasuk kejuruteraan kuasa, kejuruteraan

makanan dan pengeluaran petroleum, analisis bendalir tak Newtonian masih menarik minat penyelidik pada masa kini (Hayat et al. 2018).

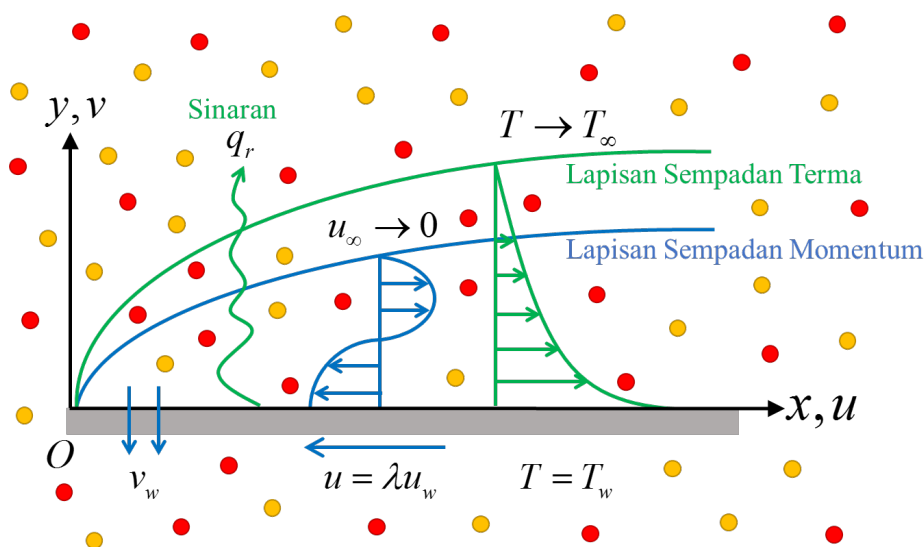
Bendalir Eyring-Powell (Powell & Eyring 1944; Yoon & Ghajar 1987) adalah satu daripada bendalir tak Newtonian yang mempunyai faedah tertentu berbanding model lain. Menurut kajian oleh Bhatti et al. (2016), Riaz, Ellahi dan Sait (2021) dan Riaz et al. (2019), ketepatan model ini dibuktikan dalam mengira skala masa bendalir dalam pelbagai saiz polimer. Jalil, Asghar dan Imran (2013) dan Rosca dan Pop (2014) meneliti aliran bendalir Eyring-Powell dalam aliran bebas selari, manakala Akbar, Ebaid dan Khan (2015) dan Ara et al. (2014) masing-

masing mengkaji kesan sinaran dan MHD. Selain itu, Ghadikolaie, Hosseinzadeh dan Ganji (2017) mengkaji aliran tak mantap dalam saluran meregang. Di samping itu, Fatunmbi dan Adeosun (2020) melaporkan aliran pada plat Riga menegak. Aljabali et al. (2021) pula mengkaji kesan kelikatan yang bergantung pada suhu. Kesan sinaran dan faktor sedutan/suntikan pula dilaporkan oleh Halдар, Mukhopadhyay dan Layek (2021).

Choi dan Eastman (1995) menggunakan istilah nanobendalir bagi menggambarkan campuran bendalir asas dan nanozarah. Pak dan Cho (1998) pula merupakan pengkaji terawal yang membangunkan korelasi termofizikal untuk nanobendalir. Penyerakan nanozarah dalam bendalir asas boleh meningkatkan kadar pemindahan haba bagi sesuatu bendalir, namun keputusan sebaliknya diperhatikan oleh mereka. Disebabkan keputusan uji kaji berdasarkan korelasi nanobendalir sedia ada bercanggah dengan jangkaan berangka, Ho et al. (2010) telah menambah baik korelasi tersebut. Hasilnya, mereka telah membangunkan korelasi nanobendalir Al_2O_3 /air baharu dengan menyesuaikan keputusan uji kaji menggunakan lengkung kuasa dua terkecil. Sementara itu, nanobendalir hibrid telah direka bagi meningkatkan lagi keupayaan sesuatu bendalir dalam proses pemindahan haba dengan mempertimbangkan beberapa jenis nanozarah yang disebar dalam bendalir asas. Takabi dan Salehi (2014) telah memperkenalkan korelasi nanobendalir hibrid baharu yang telah disahkan keputusannya dengan keputusan uji kaji oleh Suresh et al. (2011). Selain itu, Khashi'ie et al. (2020) dan Waini, Ishak dan Pop (2021a, 2021b, 2021c) melaporkan analisis kestabilan temporal dalam aliran nanobendalir hibrid. Kajian lain mengenai nanobendalir hibrid boleh didapati dalam Li et al. (2022), Wakif et al. (2021) dan Waqas et al. (2021).

Aliran lapisan sempadan yang disebabkan oleh permukaan meregang/mengecut merupakan fenomena yang sering dijumpai dalam kejuruteraan industri dan proses pembuatan. Beberapa contoh proses yang melibatkan fenomena tersebut termasuklah penyemperitan polimer dan pembentukan dawai. Crane (1970) adalah yang terawal menyelidik masalah aliran pada permukaan meregang secara linear. Walau bagaimanapun, masalah permukaan mengecut telah menjadi topik yang menarik minat para penyelidik. Menurut Goldstein (1965), aliran yang dihasilkan oleh helaian mengecut pada dasarnya adalah sejenis aliran ke belakang. Aliran jenis ini berbeza daripada permukaan meregang kerana wujudnya pusaran dalam lapisan sempadan seperti yang dibincangkan oleh Wang (1990). Oleh itu, kehadiran daya luaran diperlukan untuk mengatasi keadaan ini supaya aliran mantap terhasil. Dalam kajian Miklavčič dan Wang (2006), mereka mencadangkan bahawa faktor sedutan pada permukaan yang mencukupi diperlukan bagi menjana penyelesaian untuk kes permukaan mengecut. Selain itu, aliran pada permukaan meregang/mengecut secara tak linear telah dipertimbangkan oleh beberapa penyelidik, contohnya, Cortell (2012, 2007), Rohni, Ahmad dan Pop (2012) dan Vajravelu (2001).

Tujuan kajian ini adalah untuk menyelidik kesan nanozarah hibrid terhadap ciri aliran dan terma bagi bendalir Eyring-Powell pada permukaan mengecut dengan halaju hukum kuasa. Kajian terhadap penyelesaian dual bagi aliran bendalir Eyring-Powell dengan nanozarah hibrid belum pernah dipertimbangkan dalam kajian sebelum ini. Selain itu, kajian ini melaporkan nilai kritikal bagi parameter fizikal dan analisis kestabilan penyelesaian dual juga dijalankan.



RAJAH 1. Model fizikal aliran bendalir pada permukaan mengecut

FORMULASI MATEMATIK

Pertimbangkan model fizikal bagi aliran bendalir Eyring-Powell pada permukaan mengecut dengan nanozarah hibrid seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1. Diandaikan bahawa halaju regangan diberikan oleh $u_w(x) = ax^{1/3}$ dengan $a > 0$ mewakili regangan dan $a < 0$ mewakili kecutan. Selain itu, fluks sinaran haba diberikan sebagai $q_r = -(4\sigma^*/3k^*)(\partial T^4/\partial y)$ yang $T^4 \cong 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4$. Simbol σ^* dan k^* masing-masing adalah pekali Stefan-Boltzmann dan pekali penyerapan purata Rosseland (Rosseland 1931) dan T adalah suhu bendalir.

Merujuk kepada kajian oleh Haldar, Mukhopadhyay dan Layek (2021), Roşca dan Pop (2014) dan Waini, Ishak dan Pop (2021b), persamaan lapisan sempadan bagi aliran ini diberi oleh

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_{hmf} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu_{hmf} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta\delta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2\beta\delta^3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$\left(\rho C_p \right)_{hmf} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \left(k_{hmf} + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

tertakluk kepada syarat sempadan:

$$u = \lambda u_w(x), \quad v = v_w(x), \quad T = T_w \quad \text{pada} \quad y = 0; \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty \quad \text{apabila} \quad y \rightarrow \infty \quad (4)$$

dengan u adalah komponen halaju dalam arah x dan v dalam arah y ; v_w adalah fluks jisim permukaan dan T adalah suhu bendalir. Selanjutnya, β dan δ adalah parameter bendalir Eyring-Powell; μ adalah kelikatan dinamik; ρ adalah ketumpatan; k adalah kekonduksian terma; dan (ρC_p) adalah kapasiti haba. Sementara itu, sifat termofizikal bagi nanozarah AA7075, AA7072, dan metanol diberikan dalam Jadual 1. Simbol ϕ_1 dan ϕ_2 masing-masing mewakili nanozarah AA7075 dan AA7072. Manakala, sifat termofizikal nanobendalir hibrid diberikan dalam Jadual 2.

Penjelmaan keserupaan berikut diperkenalkan (Haldar, Mukhopadhyay & Layek 2021):

$$\psi = x^{2/3} \sqrt{\frac{3av_f}{2}} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \eta = \frac{y}{x^{1/3}} \sqrt{\frac{2a}{3v_f}} \quad (5)$$

Oleh itu:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax^{1/3} f'(\eta), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\frac{2av_f}{3}} x^{-1/3} \left(f(\eta) - \frac{1}{2} \eta f'(\eta) \right) \quad (6)$$

dan:

$$v_w(x) = -\sqrt{\frac{2av_f}{3}} x^{-1/3} S \quad (7)$$

yang $f(0) = S$ adalah parameter fluks jisim.

JADUAL 1. Sifat termofizikal nanozarah AA7075, AA7072 dan metanol (Tlili et al. 2020)

Sifat termofizikal	Nanozarah		Bendalir asas
	AA7075	AA7072	Metanol
ρ (kg/m ³)	2810	2720	792
C_p (J/kgK)	960	893	2545
k (W/mK)	173	222	0.2035
Nombor Prandtl, Pr			7.38

JADUAL 2. Sifat termofizikal nanobendalir hibrid (Waini, Ishak & Pop 2021b)

Sifat termofizikal	Nanobendalir hibrid
Kelikatan dinamik	$m_{hmf} = \frac{m_f}{(1 - f_{hmf})^{2.5}}$
Kapasiti haba	$(rC_p)_{hmf} = (1 - f_{hmf})(rC_p)_f + f_1(rC_p)_{n1} + f_2(rC_p)_{n2}$
Ketumpatan	$r_{hmf} = (1 - f_{hmf})r_f + f_1r_{n1} + f_2r_{n2}$
Kekonduksian terma	$\frac{k_{hmf}}{k_f} = \frac{\frac{f_1k_{n1} + f_2k_{n2} + 2k_f + 2(f_1k_{n1} + f_2k_{n2}) - 2f_{hmf}k_f}{f_{hmf}}}{\frac{f_1k_{n1} + f_2k_{n2} + 2k_f - (f_1k_{n1} + f_2k_{n2}) + f_{hmf}k_f}{f_{hmf}}}$

Dengan menggunakan penjelmaan tersebut, penyelesaian keserupaan berikut diperoleh:

$$\frac{1}{\rho_{hmf}/\rho_f} \left(\frac{\mu_{hmf}}{\mu_f} + \beta_1 - \frac{2}{3} \beta_1 \delta_1 (f'')^2 \right) f''' + ff'' - \frac{1}{2} f'^2 = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{1}{(\rho C_p)_{hmf}/(\rho C_p)_f} \left(\frac{k_{hmf}}{k_f} + \frac{4}{3} R \right) \theta'' + f\theta' = 0 \tag{9}$$

tertakluk kepada syarat sempadan:

$$f(0) = S, \quad f'(0) = \lambda, \quad \theta(0) = 1; \tag{10}$$

$$f'(\eta) \rightarrow 0, \quad \theta(\eta) \rightarrow 0 \text{ apabila } \eta \rightarrow \infty$$

dengan $\lambda = 1$ (permukaan meregang) dan $\lambda = -1$ (permukaan mengecut). Selanjutnya, parameter bendalir Eyring-Powell β_1 dan δ_1 , parameter sinaran haba R dan nombor Prandtl Pr ditakrifkan sebagai:

$$\beta_1 = \frac{1}{\mu_f \beta \delta}, \quad \delta_1 = \frac{a^3}{2\delta^2 \nu_f}, \quad R = \frac{4\sigma^* T_\infty^3}{k_f k^*}, \tag{11}$$

$$Pr = \frac{(\mu C_p)_f}{k_f}$$

Kuantiti fizikal yang dipertimbangkan adalah pekali geseran pada permukaan C_f dan kadar pemindahan haba (nombor Nusselt) setempat Nu_x berikut:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_f u_w^2(x)}, \quad Nu_x = \frac{xq_w}{k_f (T_w - T_\infty)}, \tag{12}$$

yang τ_w adalah tegasan ricih pada permukaan dan q_w adalah fluks haba, yang diberi oleh:

$$\tau_w = \left(\left(\mu_{hmf} + \frac{1}{\beta \delta} \right) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{6\beta \delta^3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3 \right)_{y=0} \tag{13}$$

$$q_w = -k_{hmf} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} + (q_r)_{y=0}$$

Oleh itu, diperoleh:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} C_f Re_x^{1/2} = \left(\frac{\mu_{hmf}}{\mu_f} + \beta_1 \right) f''(0) - \frac{2}{9} \beta_1 \delta_1 f'^3(0), \tag{14}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} Nu_x Re_x^{-1/2} = - \left(\frac{k_{hmf}}{k_f} + \frac{4}{3} R \right) \theta'(0)$$

dengan $\sqrt{\frac{3}{2}} C_f Re_x^{1/2}$ adalah pekali geseran kulit (CFX) dan $\sqrt{\frac{3}{2}} Nu_x Re_x^{-1/2}$ adalah nombor Nusselt setempat (NUX) yang $Re_x = \frac{u_w(x)x}{\nu_f}$ adalah nombor Reynolds setempat.

ANALISIS KESTABILAN

Bagi menentukan kestabilan jangka panjang penyelesaian tak unik yang diperoleh, analisis kestabilan temporal dilakukan terhadap masalah nilai sempadan (8)-(10) dengan merujuk kepada kajian oleh Merkin (1986), Roşca dan Pop (2014) dan Weidman, Kubitschek dan Davis (2006). Seperti dalam kajian tersebut, pemboleh ubah berikut diperkenalkan:

$$\psi = x^{2/3} \sqrt{\frac{3av_f}{2}} f(\eta, \Gamma), \quad \theta(\eta, \Gamma) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \eta = \frac{y}{x^{1/3}} \sqrt{\frac{2a}{3v_f}}, \quad \Gamma = \frac{a}{x^{2/3}} t \quad (15)$$

Oleh itu:

$$u = ax^{1/3} \frac{\partial f}{\partial \eta}(\eta, \Gamma), \quad v = -\sqrt{\frac{2av_f}{3}} x^{-1/3} \left(f(\eta, \Gamma) - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta}(\eta, \Gamma) - \Gamma \frac{\partial f}{\partial \Gamma}(\eta, \Gamma) \right) \quad (16)$$

Pertimbangkan persamaan tak mantap untuk persamaan (2) dan (3):

$$\rho_{hmf} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu_{hmf} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta \delta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2\beta \delta^3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (17)$$

$$(\rho C_p)_{hmf} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \left(k_{hmf} + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (18)$$

dengan persamaan (1) kekal tidak berubah. Kemudian, diperoleh:

$$\frac{1}{\rho_{hmf} / \rho_f} \left(\frac{\mu_{hmf}}{\mu_f} + \beta_1 - \frac{2}{3} \beta_1 \delta_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)^2 \right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \Gamma} + \Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \Gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \Gamma} \right) = 0 \quad (19)$$

JADUAL 3. Nilai $f''(0)$ dan $-\theta'(0)$ untuk beberapa nilai β_1 apabila $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $\delta_1 = 0.1$, $R = 2$, $Pr = 0.7$, $S = 0.5$, dan $\lambda = 1$.

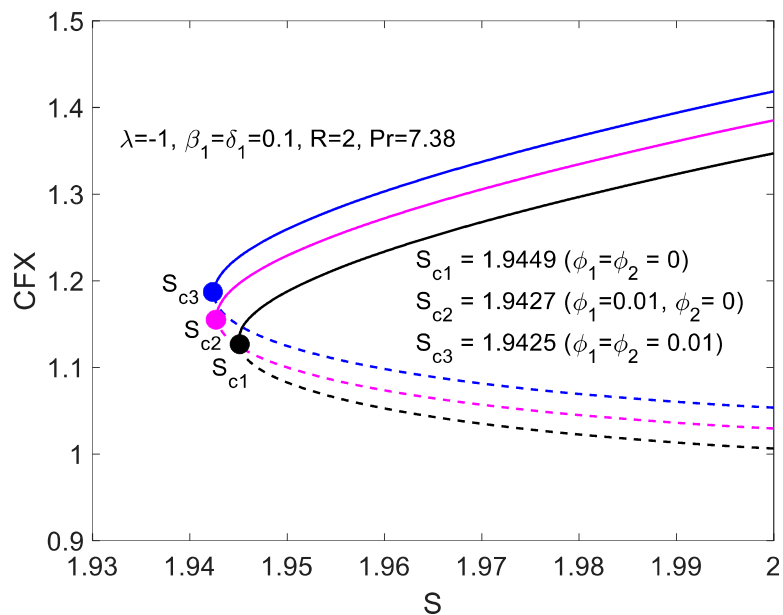
Haldar, Mukhopadhyay dan Layek (2021)			Hasil kajian	
β_1	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
0	-1.129780	0.226985	-1.129780	0.226982
0.2	-1.008180	0.238440	-1.008182	0.238437
0.4	-0.915892	0.248263	-0.915891	0.248261
0.6	-0.843226	0.256796	-0.843224	0.256793
0.8	-0.784329	0.264287	-0.784328	0.264284
1	-0.735473	0.270924	-0.735472	0.270922

JADUAL 4. Nilai CFX apabila $\delta_1 = 0.1, S = R = 2$, dan $Pr = 7.38$.

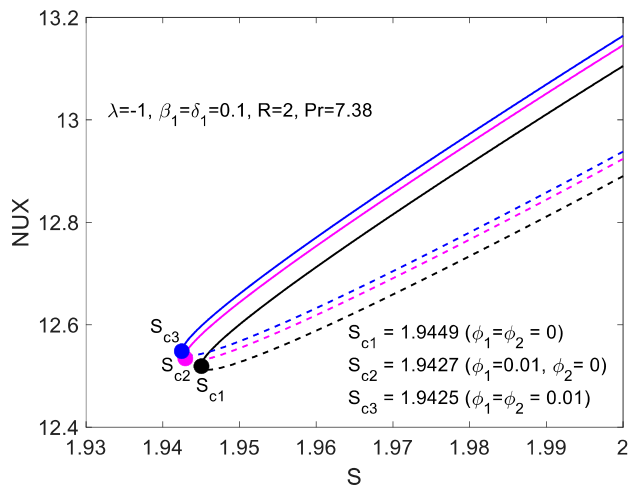
λ	β_1	CFX		
		$\phi_1 = \phi_2 = 0$	$\phi_1 = 0.01, \phi_2 = 0$	$\phi_1 = \phi_2 = 0.01$
1	0	-2.318756	-2.377828	-2.434833
	0.05	-2.331750	-2.390822	-2.447824
	0.1	-2.344722	-2.403795	-2.460795
-1	0	1.462595	1.499896	1.533554
	0.05	1.411232	1.448663	1.482081
	0.1	1.347027	1.385169	1.418532

JADUAL 5. Nilai NUX apabila $\delta_1 = 0.1, S = R = 2$, dan $Pr = 7.38$.

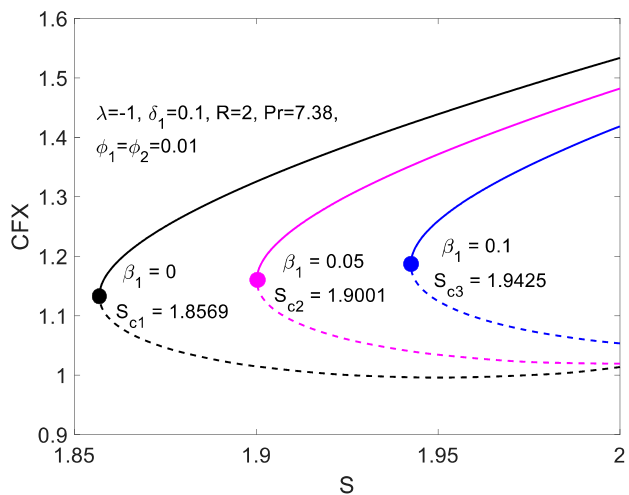
λ	β_1	NUX		
		$\phi_1 = \phi_2 = 0$	$\phi_1 = 0.01, \phi_2 = 0$	$\phi_1 = \phi_2 = 0.01$
1	0	15.844365	15.901237	15.938588
	0.05	15.857785	15.914460	15.951609
	0.1	15.870451	15.926957	15.963933
-1	0	13.213273	13.252059	13.269393
	0.05	13.162387	13.201922	13.219694
	0.1	13.105002	13.145668	13.163992



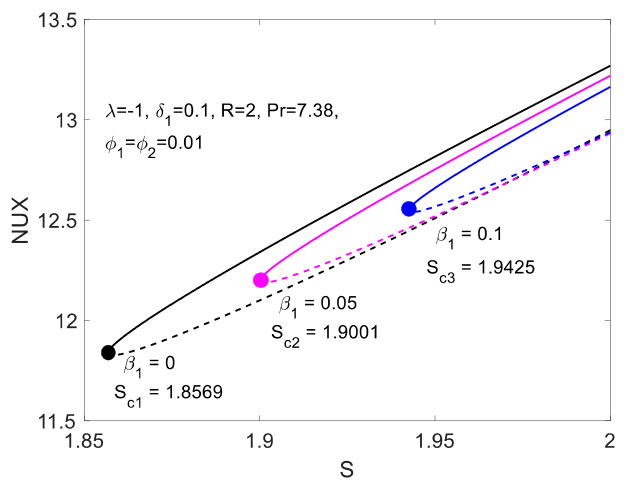
RAJAH 2. Perubahan CFX terhadap S untuk beberapa nilai f_1 dan f_2



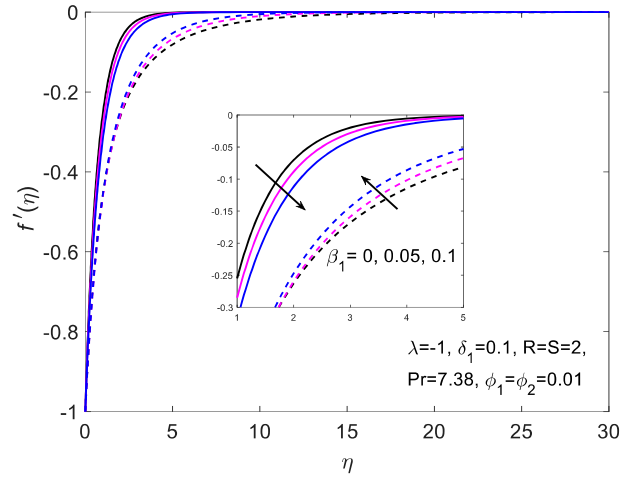
RAJAH 3. Perubahan NUX terhadap S untuk beberapa nilai f_1 dan f_2



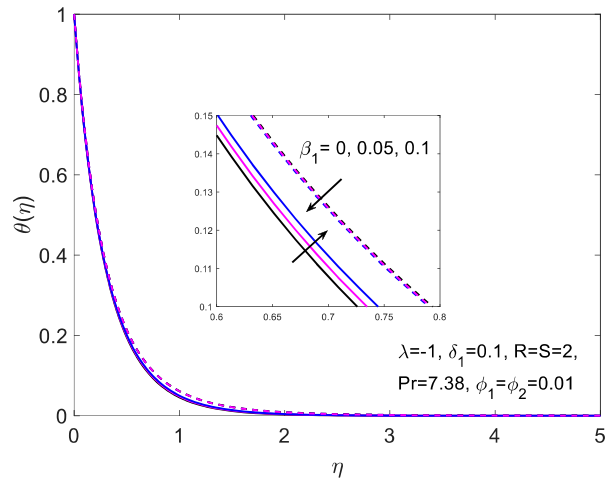
RAJAH 4. Perubahan CFX terhadap S dan β_1



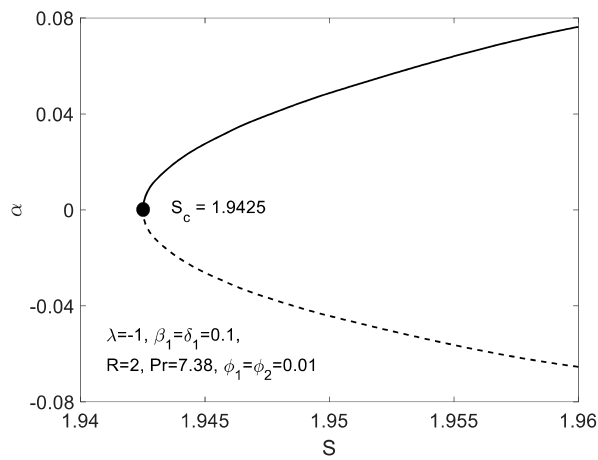
RAJAH 5. Perubahan NUX terhadap S dan β_1



RAJAH 6. Profil halaju $f'(\eta)$ untuk beberapa nilai β_1



RAJAH 7. Profil suhu $\theta(\eta)$ untuk beberapa nilai β_1



RAJAH 8. Nilai eigen α terkecil terhadap S

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{(\rho C_p)_{hf} / (\rho C_p)_f} \left(\frac{k_{hf}}{k_f} + \frac{4}{3} R \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{3}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} + \Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \Gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} \right) = 0 \quad (20)$$

tertakluk kepada syarat sempadan:

$$\begin{aligned} f(0, \Gamma) - \Gamma \frac{\partial f}{\partial \Gamma}(0, \Gamma) &= S, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}(0, \Gamma) = \lambda, \quad \theta(0, \Gamma) = 1; \\ \frac{\partial f}{\partial \eta}(\eta, \Gamma) \rightarrow 0, \quad \theta(\eta, \Gamma) \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (21)$$

Fungsi usikan berikut diperkenalkan (Weidman, Kubitschek & Davis 2006):

$$\begin{aligned} f(\eta, \Gamma) &= f_0(\eta) + e^{-\alpha \Gamma} F(\eta, \Gamma), \\ \theta(\eta, \Gamma) &= \theta_0(\eta) + e^{-\alpha \Gamma} H(\eta, \Gamma) \end{aligned} \quad (22)$$

yang $F(\eta, \Gamma)$ dan $H(\eta, \Gamma)$ adalah fungsi arbitrari dan α adalah parameter nilai eigen. Dengan mempertimbangkan $\Gamma = 0$, oleh itu, $F(\eta, \Gamma) = F_0(\eta)$ dan $G(\eta, \Gamma) = G_0(\eta)$. Kemudian, diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{hf} / \rho_f} \left(\frac{\mu_{hf}}{\mu_f} + \beta_1 - \frac{2}{3} \beta_1 \delta_1 (f_0'')^2 \right) F_0'''' - \frac{4}{3} \beta_1 \delta_1 f_0''' f_0'' F_0'' + (f_0' F_0'' + f_0'' F_0') - f_0' F_0' + \frac{3}{2} \alpha F_0' = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{(\rho C_p)_{hf} / (\rho C_p)_f} \left(\frac{k_{hf}}{k_f} + \frac{4}{3} R \right) H_0'' + (f_0' H_0' + \theta_0' F_0') + \frac{3}{2} \alpha H_0 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

tertakluk kepada syarat sempadan:

$$\begin{aligned} F_0(0) = 0, \quad F_0'(0) = 0, \quad H_0(0) = 0; \\ F_0'(\eta) \rightarrow 0, \quad H_0(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (25)$$

Bagi menentukan nilai eigen a dalam persamaan (23) dan (24), syarat sempadan $F_0'(\eta) \rightarrow 0$ apabila $\eta \rightarrow \infty$

direhatkan dan digantikan dengan $F_0''(0) = 1$, (Harris, Ingham dan Pop 2009).

HASIL DAN PERBINCANGAN

Sistem persamaan (8)-(10) diselesaikan secara berangka dengan bantuan fungsi `bvp4c` dalam perisian MATLAB. Pertama sekali, sistem persamaan ini diturunkan kepada sistem persamaan pembezaan biasa peringkat pertama. Kaedah ini diterangkan secara terperinci dalam buku oleh Shampine, Gladwell dan Thompson (2003).

Kejituan nilai berangka bagi kajian ini disahkan dengan membuat perbandingan bagi nilai $f''(0)$ dan $-\theta'(0)$ dengan kajian terdahulu. Seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 3, keputusan berangka yang diperoleh menunjukkan hasil perbandingan yang sangat baik dengan hasil diperoleh oleh Haldar, Mukhopadhyay dan Layek (2021) bagi kes khas kajian ini.

Selain itu, Jadual 4 dan 5 disediakan untuk menunjukkan magnitud pekali geseran permukaan (CFX) dan nombor Nusselt setempat (NUX) dengan kesan beberapa parameter. Didapati bahawa magnitud bagi CFX dan NUX meningkat dengan nilai β_1 yang lebih besar bagi kes permukaan meregang ($\lambda = 1$). Namun, tingkah laku yang bertentangan diperhatikan apabila kes permukaan mengecut ($\lambda = -1$) dipertimbangkan. Sementara itu, kesan nanozarah ($\phi_1 = 0.01, \phi_2 = 0$) menunjukkan peningkatan terhadap magnitud bagi CFX dan NUX dengan kadar peningkatannya masing-masing adalah 2.55% dan 0.36%. Namun, peningkatan yang lebih ketara diperhatikan apabila nanozarah hibrid ($\phi_1 = \phi_2 = 0.01$) dipertimbangkan dengan 5.01% dan 0.59% kadar peningkatan berbanding bendalir asas bagi kes $\beta_1 = 0$ dan $\lambda = 1$. Pemerhatian ini menyokong fakta bahawa nanobendalir hibrid menunjukkan ciri terma yang lebih baik berbanding dengan kedua-dua bendalir asas dan nanobendalir yang mengandungi nanozarah tunggal, disebabkan oleh kesan sinergistik nanozarah tersebut.

Rajah 2 hingga 5 menunjukkan perubahan CFX dan NUX terhadap parameter sedutan, S untuk beberapa nilai parameter terpilih. Didapati bahawa penyelesaian dual (penyelesaian pertama dan penyelesaian kedua) wujud sehingga nilai kritikal S . Ini membuktikan bahawa parameter sedutan diperlukan untuk menjana penyelesaian dual pada permukaan mengecut. Tiada penyelesaian diperoleh melebihi nilai kritikal ini kerana lapisan sempadan telah terpisah dari permukaan. Daripada rajah tersebut, penyelesaian pertama diwakili oleh garis padu manakala penyelesaian kedua diwakili oleh garis putus-putus.

Secara terperinci, Rajah 2 dan 3 menunjukkan perubahan CFX dan NUX terhadap S untuk beberapa nilai f_1 dan f_2 . Diperhatikan bahawa CFX dan NUX meningkat dengan lebih ketara apabila parameter nanozarah hibrid dipertimbangkan berbanding bendalir asas dan

nanobendalir biasa. Selain itu, perubahan kecil dapat dilihat pada nilai kritikal S apabila nilai f_1 dan f_2 yang berlainan dipertimbangkan. Berdasarkan pengiraan berangka, nilai kritikal S untuk kes bendalir asas ($\phi_1 = \phi_2 = 0$), nanobendalir ($\phi_1 = 0.01, \phi_2 = 0$) dan nanobendalir hibrid ($\phi_1 = \phi_2 = 0.01$) masing-masing adalah $S_c = 1.9449, 1.9427$ dan 1.9425 .

Perubahan pekali geseran pada permukaan (CFX) dan nombor Nusselt setempat (NUX) terhadap S dan β_1 diberikan dalam Rajah 4 dan 5. Berlaku penurunan terhadap nilai CFX dan NUX bagi nilai β_1 yang lebih besar untuk penyelesaian pertama. Namun, tingkah laku sebaliknya diperhatikan untuk penyelesaian kedua. Julat penyelesaian keserupaan diperluas dengan nilai kritikal $S_c = 1.8569, 1.9001$ dan 1.9425 bagi nilai $\beta_1 = 0, 0.05$, dan 0.1 . Sementara itu, Rajah 6 dan 7 pula menunjukkan profil halaju dan suhu untuk beberapa nilai parameter β_1 . Didapati bahawa profil tersebut memenuhi syarat sempadan, justeru mengesahkan keputusan berangka yang diperolehi. Selain itu, ketebalan lapisan sempadan halaju dan suhu meningkat dengan nilai β_1 yang lebih besar untuk penyelesaian pertama. Secara fizikal, tingkah laku ini disebabkan oleh kelikatan bendalir menjadi kurang likat yang menyebabkan halaju bendalir berkurangan. Begitu juga, suhu yang lebih tinggi diperhatikan apabila nilai β_1 yang lebih besar dipertimbangkan. Namun, penyelesaian kedua menunjukkan tingkah laku yang bertentangan.

Nilai eigen a terkecil untuk pelbagai nilai S ditunjukkan dalam Rajah 8. Berpandukan persamaan (22), nilai positif bagi a menyebabkan penyusutan gangguan dalam masa panjang $\Gamma \rightarrow \infty$, bermaksud aliran adalah stabil. Perkara sebaliknya berlaku bagi nilai eigen a yang negatif. Daripada rajah tersebut, jelas menunjukkan bahawa penyelesaian pertama memberi nilai a positif manakala penyelesaian kedua memberi nilai a negatif. Ini membawa maksud hanya satu daripada penyelesaian tersebut yang stabil dalam masa panjang. Selain itu, dapat diperhatikan bahawa nilai eigen a menuju ke nilai sifar sama ada bagi penyelesaian pertama atau penyelesaian kedua apabila nilai S menghampiri S_c . Pemerhatian ini menggambarkan bahawa peralihan nilai eigen a berlaku pada titik percabangan.

KESIMPULAN

Aliran bendalir Eyring-Powell terhadap permukaan mengecut dengan kesan nanozarah hibrid telah dikaji. Persamaan aliran dijelmakan daripada persamaan pembezaan separa kepada persamaan pembezaan biasa (keserupaan). Kemudian, keputusan berangka diperolehi dengan bantuan fungsi `bvp4c` dalam perisian MATLAB. Perbandingan antara keputusan berangka kajian ini dengan kajian terdahulu dilakukan, bagi kes khas kajian ini. Keputusan menunjukkan hasil yang sangat baik. Hasil kajian menunjukkan bahawa kehadiran nanozarah hibrid meningkatkan pekali geseran pada permukaan dan

kadar pemindahan haba bendalir masing-masing dengan kadar 5.01% dan 0.59% peningkatan berbanding bendalir asas. Sebaliknya, parameter bendalir Eyring-Powell menyebabkan kuantiti fizikal tersebut menurun. Analisis kestabilan temporal dilakukan untuk menyemak kestabilan penyelesaian berangka yang diperolehi. Didapati bahawa hanya satu daripada dua penyelesaian tersebut yang stabil, dalam tempoh tempoh panjang.

PENGHARGAAN

Bantuan kewangan yang diterima daripada Universiti Teknikal Malaysia Melaka dan Universiti Kebangsaan Malaysia amat dihargai. Kajian oleh Iskandar Waini dibiayai oleh geran PJP/2022/FTKMP/S01891 daripada Universiti Teknikal Malaysia Melaka.

RUJUKAN

- Akbar, N.S., Ebaid, A. & Khan, Z.H. 2015. Numerical analysis of magnetic field effects on Eyring-Powell fluid flow towards a stretching sheet. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 382: 355-358.
- Aljabali, A., Kasim, A.R.M., Arifin, N.S., Isa, S.M. & Ariffin, N.A.N. 2021. Analysis of convective transport of temperature-dependent viscosity for non-Newtonian Eyring-Powell fluid: A numerical approach. *Computers, Materials and Continua* 66(1): 675-689.
- Ara, A., Khan, N.A., Khan, H. & Sultan, F. 2014. Radiation effect on boundary layer flow of an Eyring-Powell fluid over an exponentially shrinking sheet. *Ain Shams Engineering Journal* 5(4): 1337-1342.
- Bhatti, M.M., Abbas, T., Rashidi, M.M., Ali, M.E.S. & Yang, Z. 2016. Entropy generation on MHD Eyring-Powell nanofluid through a permeable stretching surface. *Entropy* 18(6): 224.
- Choi, S.U.S. & Eastman, J.A. 1995. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. *Proceedings of the 1995 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, FED 231/MD 66: 99-105*.
- Cortell, R. 2012. Combined effect of viscous dissipation and thermal radiation on fluid flows over a nonlinearly stretched permeable wall. *Meccanica* 47(3): 769-781.
- Cortell, R. 2007. Viscous flow and heat transfer over a nonlinearly stretching sheet. *Applied Mathematics and Computation* 184(2): 864-873.
- Crane, L.J. 1970. Flow past a stretching plate. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP* 21(4): 645-647.
- Fatunmbi, E.O. & Adeosun, A.T. 2020. Nonlinear radiative Eyring-Powell nanofluid flow along a vertical Riga plate with exponential varying viscosity and chemical reaction. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 119: 104913.

- Ghadikolaie, S.S., Hosseinzadeh, K. & Ganji, D.D. 2017. Analysis of unsteady MHD Eyring-Powell squeezing flow in stretching channel with considering thermal radiation and Joule heating effect using AGM. *Case Studies in Thermal Engineering* 10: 579-594.
- Goldstein, S. 1965. On backward boundary layers and flow in converging passages. *Journal of Fluid Mechanics* 21(1): 33-45.
- Haldar, S., Mukhopadhyay, S. & Layek, G.C. 2021. Effects of thermal radiation on Eyring-Powell fluid flow and heat transfer over a power-law stretching permeable surface. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* 22(5): 366-375.
- Harris, S.D., Ingham, D.B. & Pop, I. 2009. Mixed convection boundary-layer flow near the stagnation point on a vertical surface in a porous medium: Brinkman model with slip. *Transport in Porous Media* 77(2): 267-285.
- Hayat, T., Hussain, Z., Farooq, M. & Alsaedi, A. 2018. Magnetohydrodynamic flow of Powell-Eyring fluid by a stretching cylinder with Newtonian heating. *Thermal Science* 22(1): 371-382.
- Ho, C.J., Liu, W.K., Chang, Y.S. & Lin, C.C. 2010. Natural convection heat transfer of alumina-water nanofluid in vertical square enclosures: An experimental study. *International Journal of Thermal Sciences* 49(8): 1345-1353.
- Jalil, M., Asghar, S. & Imran, S.M. 2013. Self-similar solutions for the flow and heat transfer of Powell-Eyring fluid over a moving surface in a parallel free stream. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 65: 73-79.
- Khashi'ie, N.S., Waini, I., Zainal, N.A. & Hamzah, K. 2020. Hybrid nanofluid flow past a shrinking cylinder with prescribed surface heat flux. *Symmetry* 12(9): 1493.
- Li, P., Duraihem, F.Z., Awan, A.U., Al-Zubaidi, A., Abbas, N. & Ahmad, D. 2022. Heat transfer of hybrid nanomaterials base Maxwell micropolar fluid flow over an exponentially stretching surface. *Nanomaterials* 12(7): 1207.
- Merkin, J.H. 1986. On dual solutions occurring in mixed convection in a porous medium. *Journal of Engineering Mathematics* 20(2): 171-179.
- Miklavčič, M. & Wang, C.Y. 2006. Viscous flow due to a shrinking sheet. *Quarterly of Applied Mathematics* 64(2): 283-290.
- Pak, B.C. & Cho, Y.I. 1998. Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide. *Experimental Heat Transfer* 11(2): 151-170.
- Powell, R.E. & Eyring, H. 1944. Mechanisms for the relaxation theory of viscosity. *Nature* 154: 427-428.
- Riaz, A., Ellahi, R., Bhatti, M.M. & Marin, M. 2019. Study of heat and mass transfer in the Eyring-Powell model of fluid propagating peristaltically through a rectangular compliant channel. *Heat Transfer Research* 50(16): 1539-1560.
- Riaz, A., Ellahi, R. & Sait, S.M. 2021. Role of hybrid nanoparticles in thermal performance of peristaltic flow of Eyring-Powell fluid model. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry* 143: 1021-1035.
- Rohani, A.M., Ahmad, S. & Pop, I. 2012. Note on Cortell's non-linearly stretching permeable sheet. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55(21-22): 5846-5852.
- Roşca, A.V. & Pop, I. 2014. Flow and heat transfer of Powell-Eyring fluid over a shrinking surface in a parallel free stream. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 71: 321-327.
- Rosseland, S. 1931. *Astrophysik Und Atom-Theoretische Grundlagen*. Berlin: Springer-Verlag.
- Shampine, L.F., Gladwell, I. & Thompson, S. 2003. *Solving ODEs with MATLAB*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Suresh, S., Venkataraj, K.P., Selvakumar, P. & Chandrasekar, M. 2011. Synthesis of Al₂O₃-Cu/water hybrid nanofluids using two step method and its thermo physical properties, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 388(1-3): 41-48.
- Takabi, B. & Salehi, S. 2014. Augmentation of the heat transfer performance of a sinusoidal corrugated enclosure by employing hybrid nanofluid. *Advances in Mechanical Engineering* 6: 147059.
- Tlili, I., Nabwey, H.A., Ashwinkumar, G.P. & Sandeep, N. 2020. 3-D magnetohydrodynamic AA7072-AA7075/methanol hybrid nanofluid flow above an uneven thickness surface with slip effect. *Scientific Reports* 10(1): 4265.
- Vajravelu, K. 2001. Viscous flow over a nonlinearly stretching sheet. *Applied Mathematics and Computation* 124(3): 281-288.
- Waini, I., Ishak, A. & Pop, I. 2021a. Hybrid nanofluid flow on a shrinking cylinder with prescribed surface heat flux. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 31(6): 1987-2004.
- Waini, I., Ishak, A. & Pop, I. 2021b. Hybrid nanofluid flow over a permeable non-isothermal shrinking surface. *Mathematics* 9: 538.
- Waini, I., Ishak, A. & Pop, I. 2021c. Melting heat transfer of a hybrid nanofluid flow towards a stagnation point region with second-order slip. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering* 235(2): 405-415.

- Wakif, A., Chamkha, A., Thumma, T., Animasaun, I.L. & Schaqui, R. 2021. Thermal radiation and surface roughness effects on the thermo-magneto-hydrodynamic stability of alumina-copper oxide hybrid nanofluids utilizing the generalized Buongiorno's nanofluid model. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry* 143(2): 1201-1220.
- Wang, C.Y. 1990. Liquid film on an unsteady stretching surface. *Quarterly of Applied Mathematics* 48(4): 601-610.
- Waqas, H., Farooq, U., Naseem, R., Hussain, S. & Alghamdi, M. 2021. Impact of MHD radiative flow of hybrid nanofluid over a rotating disk. *Case Studies in Thermal Engineering* 26(4): 101015.
- Weidman, P.D., Kubitschek, D.G. & Davis, A.M.J. 2006. The effect of transpiration on self-similar boundary layer flow over moving surfaces. *International Journal of Engineering Science* 44(11-12): 730-737.
- Yoon, H.K. & Ghajar, A.J. 1987. A note on the Powell-Eyring fluid model. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 14(4): 381-392.

*Pengarang untuk surat-menyurat; email: anuar_mi@ukm.edu.my