Jurnal Terjemahan Alam & Tamadun Melayu 2:1 (2010) 125 - 143

Landasan Teori Kenisbian Am

ALBERT. EINSTEIN

A. PERTIMBANGAN ASASI TENTANG POSTULAT KENISBIAN

§1. CERAPAN KE ATAS TEORI KENISBIAN KHAS

Teori kenisbian khas ini diasaskan postulat yang berikut, yang juga dipenuhi mekanik Galileo dan Newton. Jika sistem ko-ordinat K dipilih supaya, berhubung dengannya, hukum fizik sah berlaku dengan baiknya dalam bentuk yang paling mudah, maka hukum yang sama juga sah berlaku dengan baiknya berhubung dengan apa-apa sistem ko-ordinat yang lain K' yang bergerak mengikut translasi seragam secara nisbinya dengan K. Kami namakan postulat ini "prinsip kenisbian khas". Perkataan ini istimewa dimaksudkan bertujuan untuk melekat dengan situasi tersekatnya prinsip itu pada kes K' bergerak mengikut translasi seragam secara nisbinya dengan K, tetapi kesetaraan K' dengan K tidak meluas kepada kes gerakan tidak seragam K' secara nisbinya dengan K.

Oleh sebab itu, teori kenisabian khas itu tidak meninggalkan mekanik klasik menerusi postulat kenisbian, tetapi menerusi postulat kemalaran halaju cahaya dalam vakum. Daripada postulat ini bersama-sama dengan prinsip kenisbian khas, maka terbitlah, dengan cara yang diketahui umum, kenisbian keserentakan, penjelmaan Lorentzan, dan hukum yang berkaitan dengannya untuk kelakuan jasad bergerak dan kelakuan jam.

Pengubahsuaian yang dilakukan ke atas teori kenisbian khas itu menjadikan teori ruang dan masa berubah jauh, tetapi masih ada seperkara yang mustahak yang tetap kekal tanpa perubahannya. Sebab berlakunya sedemikian ialah kerana hukum geometri, mengikut teori kenisbian khas sekalipun, ditafsirkan secara langsung sebagai hukum yang berhubung dengan kedudukan nisbi semungkinnya bagi jasad tegar yang diam; dan, mengikut cara yang lebih am, hukum kinematik ditafsirkan sebagai hukum yang memerihalkan hubungan penyukatan jasad dengan jam. Pada dua titik yang dipilih bagi jasad tegar pegun, sentiasa ada padanan jarak yang cukup tentu panjangnya, yang bebas daripada kesetempatan dan orientasi jasad, dan juga merdeka daripada masa. Kepada dua kedudukan yang dipilih bagi jarum jam pada diam bernisbi dengan sistem rujukan yang berhak istimewa itu sentiasa ada padanan selang masa yang tentu panjangnya, yang bebas daripada tempat dan masa. Kita akan segera lihat teori kenisbian am itu tidak boleh melekat pada tafsiran fizik masa dan ruang yang mudah ini.

§ 2. PERLUNYA PERLUASAN POSTULAT KENISBIAN

Dalam mekanik klasik, dan tidak kurangnya dalam teori kenisbian khas, wujud cacatan epistemologi inheren yang mungkin buat kali pertamanya, pernah diserlahkan Ernst Mach. Kami menerangkannya menerusi teladan yang berikut. Dua jasad bendalir bersaiz dan bertabii yang sama menyewah atau melayang-layang dengan bukan tanpa tujuannya secara bebasnya dalam ruang pada sejarak yang begitu hebat jauhnya daripada atau dengan yang lain dan daripada semua jisim lain sehingga hanya daya graviti itu perlu diambil kira yang timbul daripada interaksi bahagian daripada bahagian yang berbeza buat jasad yang sama. Katalah jarak antara dua jasad itu tidak terubahkan, dan katalah tiadanya daripada mana-mana jasad itu, ada barang pergerakan nisbi daripada bahagiannya terhadap satu dengan yang lain. Akan tetapi, katalah mana-mana jisim, sebagaimana yang dicekera oleh pencerap pada diam secara nisbinya dengan jisim yang satu lagi, berputar dengan halaju sudut yang malar di sekitar garis yang menyambung antara jisim itu. Ini gerakan nisbi yang tertahkikkan bagi dua jasad ini. Sekarang katalah kita membayangkan setiap daripada jasad itu sudah ditinjau dengan alat menyukat pada diam secara nisbinya dengannya sendiri, dan katalah permukaan S_1 ternyata sebuah sfera, dan S_2 adalah sebuah elipsoid perkisaran. Dengan serta-merta selepas itu kita akan paparkan soalan – Apakah taakulan perbezaan dua jasad ini? Tiadalah jawapan yang diakui sebagai memuaskan secara epistemologinya,[1] kecuali jika taakulan yang diberikan itu ialah fakta pengalaman yang tercerapkan. Hukum kebersebaban itu tidak memberi pengertian pernyataan yang tertentu tentang alam pengalaman, kecuali apabila fakta-fakta tercerapkan akhirnya muncul sebagai sebab musababnya.

Mekanik Newtonian itu tidak memberi jawapan yang memuaskan kepada soalan ini. Ilmu itu memberi maklumat yang berikut. Hukum mekanik yang sah berlaku dalam ruang R_1, berhubung dengan jasad S_1 yang berada dalam diam, tetapi tidak sah berlakunya dalam ruang R_2, berhubung dengan jasad S_2 yang berada dalam diam. Akan tetapi, ruang berhak istimewa R_1 itu daripada Galileo, yang oleh itu diperkenalkan, adalah semata-mata untuk *faktisius*, dan bukannya satu benda yang tercerapkan. Oleh sebab itu, jelaslah bahawa mekanik Newton sebenarnya tidak memenuhi keperluan kebersebaban dalam kes yang dipertimbangkan ini, tetapi hanya secara ketaranya berlaku sedemikian, kerana mekanik itu membuat sebab faktisius R_1 itu bertanggungjawab untuk perbezaaan tercerapnya dalam jasad S_1 dan S_2.

Satu-satunya jawapan yang memuaskan itu semestinya ialah betapanya sistem fizik yang terdiri daripada S_1 dan S_2 itu tidaklah mendedahkan dirinya sendiri akan sebab terkhayalkan yang membolehkan rujukan itu dapat dilakukan terhadap perbezaan kelakuan S_1 dan S_2. Oleh itu, sebabnya ia semestinya berada *di luar* sistem ini. Kita terpaksa mengambil hukum gerakan umum itu yang khususnya menentukan potongan S_1 dan S_2, itu semestinya sedemikian rupa sehingga kelakuan mekanik S_1 dan S_2 adalah sebahagiannya dibiasakan dengan keadaan, mengikut respek yang cukuplah penting, oleh jisim-jisim yang jauh yang kita tidak masukkan ke dalam sistem yang dipertimbangkan. Jisim-jisim jauh ini dan gerakannya itu benisbi dengan S_1 dan S_2 itu semestinya dianggap sebagai punca kukuh sebab-sebab (yang semestinya rentan dengan cerapan) terjadinya kelakuan yang berbeza daripada dua jasad kita S_1 dan S_2. Jisim-jisim ini mengambil peranannya sebab faktisius R_1. Daripada semua ruang terkhayalkan R_1, R_2, dan lain-lain itu dalam barang jenis gerakan secara nisbi antara satu dengan yang lain, tiadalah satu pun yang boleh kita lihat sebagai *a priori* berhak istimewa tanpa pemulihan bangkangan epistemologi yang disebut di atas. Hukum fizik mestilah sedemikian tabiinya sehingga hukum itu berlaku pada sistem rujukan di dalam barang jenis gerakan. Di sepanjang jalan ini, kita sampai pada perluasan postulat kenisbian.

Sebagai tambahan kepada hujah yang berbobot ini daripada teori ilmu, ada fakta fizik yang diketahui dengan meluasnya yang menyebelahi perluasan teori kenisbian. Katalah K sistem rujukan Galileoan, i.i. sebuah sistem yang secara nisbinya (sekurang-kurangnya di dalam rantau empat-matra di bawah pertimbangan ini) setongkol jisim, yang cukup jauh daripada jisim-jisim lainnya, sedang bergerak secara seragam menyusuri seutas garis lurus. Katalah K' sistem rujukan yang kedua yang bergerak nisbi dengan K mengikut translasi yang terpecut secara seragam. Oleh itu, bernisbi dengan K', setongkol jisim yang cukup jauh daripada jisim-jisim lain akan berada dalam gerakan terpecut sedemikian rupa sehinggakan pecutannya dan arah pecutan itu bebas daripada gubahan benda dan keadaan kejasmanian daripada jisim itu.

Adakah ini mengizinkan pencerap yang diam bernisbi dengan K' mentadbir yang ia "benar-benar" berada dalam sistem rujukan terpecut? Jawapannya negatif; kerana hubungan yang tersebut di atas itu berkenaan dengan jisim-jisim yang bergerak secara bebas daripada K' yang boleh ditafsirkan sama baiknya seperti berikut:

Sistem rujukan K' tidak terpecut, tetapi wilayah ruang masa yang dimusykilkan itu adalah di bawah pengaruh medan graviti, yang menjanakan gerakan jasad terpecut secara nisbi dengan K'.

Pandangan ini memungkinkan berlakunya di hadapan kita pengajaran pengalaman tentang kewujudan medan daya, iaitu, medan graviti, yang memiliki sifat yang menakjubkan atau terulaskan yang menyalur atau menghulur pecutan yang sama kepada semua jasad.[2] Kelakuan mekanik jasad yang bernisbi dengan K' itu adalah sama dengan kehadirannya sendiri untuk mengalami kes sistem yang biasa yang kita anggapnya sebagai "pegun" atau "berhak istimewa". Oleh sebab itu, daripada pendirian fizik, anggapan itu cepat sedia mengesyorkannya sendiri bahawa kedua-dua sistem K dan K' itu sama berhak dilihat sebagai "pegun", iaitu tegasnya, kedua-duanya ada hak yang sama sebagai sistem rujukan untuk perihalan fenomenon fizik.

Daripada renungan ini, boleh dilihat bahawa dalam pengejaran teori kenisbian am, kita dipimpin menuju kepada teori kegravitian, kerana kita mampu "menghasilkan" medan graviti hanya dengan mengubah sistem ko-ordinat.

Adalah jelas bahawa prinsip kemalaran halaju cahaya dalam *vakuo* itu mestilah diubah-suai, kerana dengan mudahnya kita mengiktiraf lintasan sinar cahaya terhadap K' itu mestilah pada amnya melengkung-linear, jika terhadap K cahaya merambat mengikut garis lurus dengan halaju malar tentu.

§ 3. KONTINUM RUANG-MASA. KEPERLUAN KEKOVARIANAN AM UNTUK PERSAMAAN YANG MENGUNGKAPKAN HUKUM ALAM TABII AM

Dalam mekanik klasik, begitu juga dalam teori kenisbian khas, ko-ordinat ruang dan masa itu ada makna fizik langsungnya. Untuk mengatakan peristiwa-titik X_1 itu ada ko-ordinat x_1 bermakna unjuran peristiwa-titik pada paksi X_1 itu ditentukan batang tegar dan mengikut kepersetujuan dengan petua geometri Euklidan. Ia diperoleh dengan menyukat habis batang yang diberi (unit panjang) x_1 kali daripada asalan ko-ordinat di sepanjang paksi X_1. Untuk mengatakan peristiwa-titik X_4 ada ko-ordinat $x_4 = t$ itu bermakna jam piawai itu dibuat untuk menyukat masa mengikut unit tempoh tentu, dan yang pegun bernisbi dengan sistem ko-ordinat itu dan secara amalinya melepasi atau hampir-hampir bersekena tepat di dalam ruang dengan peristiwa-titik[3], akan menyukat habis $x_4 = t$ tempoh pada keberlakuan peristiwa itu.

Pandangan tentang ruang dan masa ini sentiasa ada dalam minda fizikawan, sekalipun jika, sebagai petua, mereka tidak menyedarinya selama ini. Ini jelas daripada peranan konsep ini dalam penyukatan kejasmanian selama ini; inilah juga semestinya yang terpahat dalam renungan pembaca ke atas perenggan yang lepas (seksyen § 2) dalam memperoleh apa-apa makna daripada bacaan di situ. Akan tetapi, kami tunjuk sekarang bahawa kita mesti tolak ke tepi pendapat itu dengan menggantikannya dengan pandangan yang lebih am lagi, untuk membolehkan kita membawa postulat kenisbian am, jika teori kenisbian khas itu dapat diterapkan pada kes khas ketiadaan medan graviti itu.

Dalam ruang yang bebas daripada medan graviti itu diperkenalkan sistem rujukan Galileoan K (x,y,z,t), dan juga sistem ko-ordinat K' $(x'y',z't')$ dalam putaran seragam yang bernisbi dengan K. Katalah asalan bagi kedua-dua sistem ini, di samping juga paksi-paksi Z-nya itu bersekena dengan tepatnya secara kekalnya. Kami tunjuk bahawa untuk penyukatan ruang-masa dalam sistem K', takrif makna fizik bagi panjang dan masa di atas tidak boleh dipertahankan. Atas taakulan simetri, jelaslah bahawa bulatan di sekeliling asalan dalam satah X, Y daripada K boleh pada masa yang sama itu dianggap sebagai bulatan dalam satah X',Y' bagi K'. Kita andai ukur lilit dan diameter bulatan ini disukat dengan seunit sukatan yang kecil tak terpermanai berbanding dengan jejari, dan bahawasanya kita ada nisbah daripada dua hasil itu. Jika ujikaji ini dilakukan dengan batang-penyukat diam bernisbi dengan sistem Galileoan K, nisbahnya ialah ð. Dengan batang-penyukat diam bernisbi dengan K', nisbahnya menjadi lebih besar daripada ð. Ini sedia difahami jika divisikan seluruh proses penyukatan daripada sistem "pegun" K, dan mengambil pertimbangan bahawa batang-penyukatan yang diterapkan kepada periferi itu mengalami pengerutan Lorentzan, sementara yang diterapkan di sepanjang jejari itu tidak berlaku sedemikian. Oleh yang demikian, geometri Euklidan tidak berlaku pada K'. Oleh itu, berkecailah nosi ko-ordinat yang ditakrifkan di atas, yang dipreandaikan sah berlakunya geometri Euklidan, berhubung dengan sistem K' itu. Begitu jugalah kita tak dapat memperkenalkan masa yang sepadan dengan keperluan fizik di dalam K', yang ditunjukkan jam pada diam bernisbi dengan K'. Untuk meyakinkan diri kita sendiri akan adanya kemungkinan ini, marilah kita mengkhayalkan dua buah jam yang berjuzukkan serupa serba-serbinya dan ditempatkan, satu di asalan ko-ordinat, dan yang lainnya di lilitan bulatan, dan kedua-dua divisikan daripada sistem "pegun" K. Dengan hasil yang benar-benar diketahui daripada teori kenisbian khas, jam di lilitan – dicekera daripada K – bergerak lebih perlahan daripada yang satu lagi, kerana yang terdahulu berada dalam gerakan dan yang kemudian itu diam. Seorang pencerap di asalan ko-ordinat yang sepunya, termampukan mencerap jam di lilitan dengan cara cahaya, oleh itu akan melihatnya tertinggal ke belakang jam di sisinya. Oleh sebab dia tidak akan membuat keputusan membiarkan halaju cahaya di sepanjang lintasan yang dimusykilkan bergantung secara tersurat pada masa, maka ia akan mentafsir cerapannya sebagai yang menunjukkan jam di lilitan "benar-benar" bergerak lebih perlahan daripada jam di asalan. Jadi, ia akan terpaksa mentakrifkan masa sedemikian cara sehingga kadar jam bergantung pada tempat beradanya jam itu.

Oleh sebab itu, kita sampai kepada hasil yang berikut ini. Dalam teori kenisbian am, ruang dan masa tidak boleh ditakrif sedemikian cara sehingga berbeza ko-ordinatnya ruang itu boleh disukat secara langsung dengan unit batang-penyukat, atau berbeza dalam ko-ordinat masa oleh jam piawai.

Oleh itu, berkecailah kaedah yang sampai sekarang telah digunakan untuk menghamparkan ko-ordinat pada kontinum ruang-masa mengikut cara yang tentu, dan nampaknya tiadalah cara lain yang akan mengizinkan kita mendokong sistem ko-ordinat pada alam semesta empat-matra sehinggakan kita boleh menjangka daripada penerapannya satu formulasi simpel yang khusus bagi hukum-hakam alam tabii. Jadi, tiadalah apa-apa baginya melainkan menganggap semua sistem ko-ordinat itu adalah terkhayalkan, pada prinsipnya, sebagai sama-sama sesuai untuk pemerihalan alam tabii. Ini mendatangkan kepada keadaan yang memerlukan hukum yang berikut:

Hukum-hakam am alam tabii adalah semestinya diungkapkan oleh persamaan yang sah berlaku dengan baiknya bagi semua sistem ko-ordinat, iaitu hukum-hakam itu kovarian terhadap barang pergantian apa jua sistem ko-ordinat (secara amnya kovarian).

Adalah jelas bahawa teori fizik yang memenuhi postulat ini juga sesuai untuk postulat kenisbian am. Sebab hasil tambahan semua pergantian dalam apa juga kes, termasuk pergantian yang sepadan dengan semua gerakan nisbi bagi sistem ko-ordinat tiga-matra. Keperluan kekovarianan am ini yang membawa keluar baki yang terakhir keobjektifan kejasmanian ruang dan masa itu adalah satu yang bersahaja, akan dilihat daripada renungan [refleksi] yang berikut. Semua pentahkikan ruang-masa kita secara tidak berubahnya membawa kepada penentuan kebersekenaan ruang-masa. Contohnya, jika peristiwa terdiri daripada semata-mata gerakan titik-titik benda, maka akhirnya tiada apa-apa yang akan tercerapkan melainkan pertemuan dua atau lebih titik ini. Lebih daripada itu, tiada apa-apa hasil penyukatan kita melainkan pentahkikan pertemuan sedemikian itu daripada titik benda daripada alat penyukat dengan titik benda yang lain, kebersekenaan antara jarum-jarum jam dengan titik pada dail jam, dan dicerap peristiwa-titik yang berlaku pada tempat yang sama pada masa yang sama.

Pengenalan sistem rujukan itu berperanan memberi khidmat tiada kasad lain daripada memfasilitasikan pemerihalan kejumlahan kebersekenaan yang sedemikian itu. Kita menetapkan persetujuan alam semesta empat pemboleh ubah ruang-masa x_1, x_2, x_3, x_4 sedemikian rupa supaya setiap peristiwa-titik ada sistem sepadan daripada nilai-nilai pemboleh ubah $x_1 \dots x_4$. Kepada dua peristiwa-titik yang bersekena itu ada suatu sistem yang sepadan daripada nilai pemboleh ubah $x_1 \dots x_4$, i.i. kebersekenaan dicirikan oleh identiti ko-ordinat. Jika, ganti pemboleh ubah $x_1 \dots x_4$, kita memperkenalkan fungsi daripadanya, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, sebagai sistem ko-ordinat yang baru, supaya sistem daripada nilai dijadikan bersepadan dengan satu dengan yang lain tanpa ambiguiti, maka kesamaan semua empat ko-ordinat di dalam sistem baru juga akan berperanan memberi khidmat sebagai ungkapan untuk kebersekenaan ruang-masa dua peristiwa-titik. Oleh sebab semua pengalaman kejasmanian kita akhirnya boleh diturunkan kepada kebersekanaan sedemikian, maka tiadalah taakulan serta-merta untuk mengutamakan sistem ko-ordinat pasti berbanding dengan yang lain, iaitu tegasnya, kita sampai pada keperluan kekovarianan am.

§ 4. HUBUNGAN EMPAT KO-ORDINAT DENGAN PENYUKATAN DI DALAM RUANG DAN MASA

Tidaklah menjadi hasad kami dalam perbincangan ini untuk mempersembahkan teori kenisbian am sebagai suatu sistem yang sedapat mungkin mudah dan mantik, dan dengan bilangan aksiom yang minimum; tetapi objektif utama kami ialah membangunkan teori ini sedemikian cara sehingga pembaca akan rasa bahawa lintasan yang kita masuk itu adalah secara psikologinya suatu yang bersahaja, dan anggapan yang dihampari itu nampaknya berdarjah keselamatan yang mungkin tertinggi tahapnya. Dengan pandangan tujuan ini, marilah sekarang bersetuju dengan perkara yang berikut:

Untuk rantau empat-matra yang kecil secara tak tepermanai, teori kenisbian mengikut pengertian yang tersekat itu adalah patut, jika ko-ordinatnya dipilih dengan sesuainya.

Bagi tujuan ini, kita mestilah memilih pecutan sistem ko-ordinat "setempat" kecil tak terpermanai supaya tiadalah medan graviti yang akan berlaku; ini mungkin berlaku untuk rantau yang kecil tak tepermanai. Biarlah X_1, X_2, X_3, menjadi ko-ordinat ruang, dan X_4 ko-ordinat masa yang sepadan yang disukat dalam unit yang patut [4] Jika batang tegar khayalan itu diambil sebagai unit sukatan, dan dengan orientasi sistem ko-ordinat yang diberi itu, maka ko-ordinat itu ada makna fizik langsung mengikut pengertian teori kenisbian khas. Dengan teori kenisbian khas, maka ungkapan

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \quad . \quad . \quad (1)$$

ada nilai yang bebas daripada orientasi sistem ko-ordinat setempat, dan tidak terpastikan oleh penyukatan ruang dan masa. Kami lambangkan *ds* sebagai magnitud unsur gegaris yang berkait dengan titik kontinum empat-matra dalam kejiranan tak terpermanai. Jika *ds* itu bernilai positif, maka kami ikut Minkowski menamainya bak-masa; jika ianya negatif, kami menamainya bak-ruang.

Kepada "unsur gegaris" yang dimusykili itu, atau kepada dua peristiwa-titik jiranan tak terpermanai, berpadananlah juga unsur itu dengan pembeza tentu $dx_1 \ldots dx_4$ daripada empat-matra ko-ordinat bagi barang sistem rujukan yang dipilih. Jika sistem ini, di samping sistem "setempat", diberi untuk rantau di bawah pertimbangan, maka dX_ν akan mengizinkan dirinya diwakili di sini oleh ungkapan homogen linear tentu bagi dx_σ:

$$dX_\nu = \sum_\sigma a_{\nu\sigma} dx_\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dengan menyemat ungkapan ini dalam (1), kita beroleh

$$ds^2 = \sum_{\tau\sigma} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

yang $g_{\sigma\tau}$ menjadi fungsi bersandarkan x_σ. Ini tidak lagi bersandarkan orientasi dan keadaan gerakan sistem ko-ordinat "setempat", kerana ds^2 ialah kuantiti yang tak terpastikan penyukatan jam-batang peristiwa-titik proksimat tak terpermanai dalam ruang-masa, dan ditakrifkan secara bebas daripada barang pilihan ko-ordinat yang khusus. Kuantiti $g_{\sigma\tau}$ dipilih di sini supaya $g_{\sigma\tau} = g_{\sigma\tau}$; penghasil-tambahan itu meluas lalu menjangkau semua nilai σ dan τ, sehingga hasil tambahnya terdiri daripada 4×4 sebutan atau suku yang dua belas daripadanya sama mengikut pasangan.

Kes teori kenisbian biasa terbit daripada kes yang dipertimbangkan di sini, menerusi taakul hubungan khusus daripada g_{st} dalam rantau terpermanai sedemikian cara sehingga g_{st} mengambil nilai malar

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Kita akan bertemu selepas ini yang pilihan ko-ordinat sedemikian itu, pada amnya, tidak mungkin dapat dilakukan untuk rantau terpermanai.

Daripada pertimbangan § 2 dan § 3, maka ekorannya kuantiti $g_{\sigma\tau}$ dianggap, daripada sudut pendirian fizik, sebagai kuantiti yang memerihalkan medan graviti mengikut hubungan dengan sistem rujukan yang dipilih. Sebabnya adalah jika kita sekarang menganggap teori kenisbian khas itu terpakai pada rantau empat-matra pasti dengan ko-ordinat yang dipilih dengan sewajarnya, maka $g_{\sigma\tau}$ ada nilai yang diberi dalam (4). Kemudian, titik benda yang bebas bergerak, bernisbi dengan sistem ini, dengan gerakan seragam mengikut garis lurus. Kemudian, jika kita memperkenalkan ko-ordinat ruang-masa baru x_1, x_2, x_3, x_4, dengan cara barang pergantian yang kita pilih, kuantiti $g^{\sigma\tau}$ dalam sistem baru ini tidak lagi malar, tetapi fungsi bersandarkan ruang dan masa. Pada masa yang sama, gerakan bagi titik benda bebas itu akan menghadirkan dirinya dalam ko-ordinat baru sebagai gerakan tak seragam melengkung-linear, dan hukum gerakan ini akan merdeka daripada tabii zarah bergerak. Oleh sebab itu, kami tafsirkan gerakan ini sebagai gerakan di bawah pengaruh medan graviti. Oleh yang demikian, kami mendapati keberlakuan medan graviti yang dikaitkan dengan keterubahan ruang-masa daripada $g_{\sigma\tau}$. Demikian jugalah dengan kes amnya, bila kita tidak lagi mampu menerusi pilihan ko-ordinat yang sesuai, menerapkan teori kenisbian khas pada rantau terpermanai, kita akan cepat berpegang pada pandangan bahawa $g_{\sigma\tau}$ memerihalkan medan graviti.

Oleh itu, mengikut teori kenisbian am, kegravitian memenuhi kedudukan yang agak berlainan terhadap daya lain, khususnya daya elektromagnet, oleh sebab sepuluh fungsi yang mewakili medan graviti pada masa yang sama mentakrif sifat-sifat metrik bagi ruang yang disukat.

B. BANTUAN MATEMATIK KEPADA FORMULASI PERSAMAAN KOVARIAN PADA AMNYA

Setelah melihat dalam perbincangan sebelum ini bahawa postulat kenisbian am memimpin kepada keperluan persaman fizik itu menjadi kovarian dalam menghadapi barang pergantian ko-ordinat $x_1 \ldots x_4$, maka kami terpaksa mempertimbangkan berapa banyak persamaan kovarian amnya yang boleh dijumpai. Kami sekarang berpaling kepada tugas matematik tulen, dan dalam penyelesaiannya kami menjumpai peranan asasi yang dimainkan invarian ds yang diberi persamaan (3), yang, meminjam daripada teori Gauss tentang permukaan, kami menamainya "unsur gegaris".

Gagasan asas bagi teori kovarian am ini adalah seperti ini. Katalah benda pasti, yang dinamai "tensor", tertakrif terhadap barang sistem ko-ordinat dengan sebilangan fungsi bersandarkan ko-ordinat itu dinamai "komponen" tensor. Kemudian ada petua pasti yang menerusinya komponen ini boleh dihitung untuk sistem ko-ordinat yang baru, jika komponen itu diketahui untuk sistem ko-ordinat asal, dan jika transformasi yang mengaitkan dua sistem itu diketahui. Benda yang selepas ini yang dinamai tensor itu selanjutnya dicirikan fakta persamaan penjelmaan untuk komponennya itu adalah linear dan homogen. Berpatutanlah berlakunya semua komponen dalam sistem baru itu pun lenyap, jika komponen itu lenyap dalam sistem asal. Oleh sebab itu, jika hukum alam tabii diungkapkan dengan mempersamakan semua komponen tensor itu kosong, maka hukum itu akan secara amnya kovarian. Dengan memeriksa hukum-hakam formulasi tensor, kita memperoleh cara-cara memformulasi hukum-hakam yang kovarian secara amnya.

§ 5. VEKTOR-EMPAT KOVARIAN DAN KONTRAVARIAN

Vektor-empat Kontravarian – "Unsur gegaris" ditakrifkan oleh empat "komponen" dx_v, yang hukum penjelmaan untuknya diungkap oleh persamaan

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Kuantiti dx'_σ itu terungkap sebagai fungsi homogen dan linear daripada dx_v. Oleh yang demikian, kita boleh melihat pembeza ko-ordinat ini sebagai komponen "tensor" bagi jenis khusus yang kami menamainya sebagai vektor-empat kontravarian. Benda yang ditakrif secara nisbinya dengan sistem ko-ordinat oleh empat kuantiti A^v, dan yang ditransformasikan oleh hukum yang sama dengan (5), iaitu

$$A'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

juga kami menamainya sebagai vektor-empat kontravarian. Ekoran serta-merta daripada (5a) ialah hasil tambah $A^\sigma \pm B^\sigma$ juga komponen vektor-empat, jika A^σ dan B^σ adalah benda tersebut. Hubungan yang sepadan sah itu berlaku untuk semua "tensor" yang diperkenalkan berikutannya kemudian. (Petua untuk penambahan dan pengurangan tensor).

Vektor-empat Kovarian – Kami ambil empat kuantiti A_v dan menamainya sebagai komponen vektor-empat kovarian, jika untuk barang pilihan sembarangan daripada vektor-empat kontravarian B^v,

$$\sum A_v B^v = \text{invarian} \qquad (6)$$

Hukum penjelmaan sebuah vektor-empat kovarian mengekori takrif ini. Sebabnya, jika kita menggantikan B^v di sebelah kanan persamaan

$$\sum_\sigma A'_\sigma B'^\sigma = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

dengan ungkapan yang terhasil daripada songsangan (5a), iaitu B^{ν} sama dengan

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} B'^{\sigma},$$

maka kita akan beroleh

$$\sum_{\sigma} B'^{\sigma} \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu} = \sum_{\sigma} B'^{\sigma} A'_{\sigma}.$$

Oleh sebab persamaan ini benar untuk nilai sembarangan bagi B'^{σ}, maka berikutan dengannya ialah hukum penjelmaan

$$A'_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Catatan Berkenaan dengan Cara Penulisan Ungkapan yang Disimpelkan. Sekilas pada persamaan perenggan di atas menunjukkan sentiasa ada penghasil-tambahan terhadap indeks-indeks yang berlaku dua kali di bawah tanda penghasil-tambahan (cth. indeks *í* di dalam (5)), dan hanya terhadap indeks-indeks yang berlaku dua kali. Oleh itu, keadaan itu memungkinkan, tanpa hilangan kejelasan, kami sengaja meniadakan tanda penghasil-tambahan itu. Pada tempatnya kami memperkenalkan kelaziman yang berikut: jika indeks itu berlaku dua kali dalam satu sebutan atau suku daripada ungkapan, maka itu sentiasalah bermakna untuk dihasil-tambahkan, kecuali dinyatakan yang sebaliknya.

Perbezaan antara vektor-empat kovarian dengan kontravarian itu terletak pada hukum penjelmaan (masing-masingnya (7) atau (5)). Kedua-dua bentuk itu adalah tensor mengikut pengertian ulasan am di atas. Mengikut respek itulah terletak kemustahakannya. Dengan mengikut Ricci dan Levi-Civita, kami lambangkan watak kontravarian dengan meletakkan indeks di atas, superskrip; manakala kovarian dengan meletakkannya di bawah, subskrip.

§ 6. TENSOR AGRA KEDUA DAN LEBIH TINGGI

Tensor Kontravarian. Jika seseorang membentuk semua enam belas hasil darab A^{mn} bagi komponen A^{m} dan B^{n} daripada dua vektor-empat kontravarian

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

maka dengan (8) dan (5a), $A^{\mu\nu}$ memenuhi hukum penjelmaan

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Kami namai perkara yang diperihal secara nisbinya dengan barang sistem rujukan dengan enam belas kuantiti, memenuhi hukum penjelmaan (9) itu sebagai tensor kontravarian agra kedua. Tidaklah setiap tensor sedemikian itu mengizinkan dirinya dibentuk mengikut cara seperti (8) daripada dua vektor-empat, tetapi mudahlah ditunjukkan bahawa barang enam belas kuantiti $A^{\mu\nu}$ yang diberi itu boleh diwakili sebagai hasil tambah $A^{\mu} B^{\nu}$ daripada empat pasangan yang dipilih secara sepatutnya daripada vektor-empat. Oleh yang demikian, kita boleh membuktikan hampir semua hukum yang berlaku pada tensor agra kedua yang ditakrifkan oleh (9) itu dengan cara yang paling mudah dengan mendemonstrasikannya untuk tensor khas jenis (8).

Tensor Kontravarian Barang Agra. Jelaslah bahawa sealiran dengan (8) dan (9), tensor kontravarian agra ketiga dan lebih tinggi lagi itu boleh juga ditakrif dengan 4^3 komponen, dan begitulah seterusnya. Dengan cara yang sama, ekoran daripada (8) dan (9), maka vektor-empat kontravarian boleh diambil mengikut pengertian ini sebagai tensor kontravarian agra pertama.

Tensor Kovarian. Di satu pihak lagi, jika kita mengambil enam belas hasil darab $A_{\mu\nu}$ daripada dua vektor-empat kovarian A_{μ} dan B_{ν} ,

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu}B_{\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

maka hukum penjelmaan untuk kuantiti ini ialah

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} A_{\mu\nu} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Hukum penjelmaan ini mentakrif kuantiti yang dinamai sebagai tensor kovarian agra kedua. Semua ulasan kami dahulu berkenaan dengan tensor kontravarian itu samalah berlakunya untuk tensor kovarian ini.

CATATAN Memudahkanlah jika kita meladeni skalar (atau invarian) sebagai tensor kontravarian atau kovarian agra sifar.

Tensor Bercampur. Kita juga boleh takrif tensor agra kedua itu sebagai jenis indeks bercampur

$$A_{\mu}^{\nu} = A_{\mu}B^{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

yang kovarian terhadap indeks μ, dan kontravarian terhadap indeks ν. Hukum penjelmaannya ialah

$$A_{\sigma}^{\prime\tau} = \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\mu}^{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Secara bersahajanya, ada tensor bercampur dengan barang bilangan indeks berwatak kovarian, dan barang bilangan indeks berwatak kontravarian. Tensor kovarian dan kontravarian boleh dilihat sebagai kes khas tensor bercampur.

Tensor Simetri. Tensor kontravarian, atau kovarian beragra kedua atau lebih tinggi lagi itu dikatakan bersimetri, atau tensor simetri, jika dua komponennya, yang diperoleh satu daripada yang lain dengan saling bertukar dua indeks, adalah sama. Tensor $A^{\mu\nu}$, atau $A_{\mu\nu}$ adalah tensor simetri jika barang gabungan daripada indeks μ,ν, masing-masingnya

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

atau,

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a)$$

…

Telah dapat dibuktikan bahawa simetri yang ditakrifkan sedemikian itu ialah satu sifat yang bebas daripada sistem rujukan. Malah, berikutan daripada (9), apabila (14) diambil pertimbangannya, maka

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu}A^{\mu\nu} = A'^{\tau\sigma}.$$

Persamaan terakhir itu tidak lain daripada bersandarkan saling bertukarnya indeks penghasil-tambahan μ dan ν, i.i. semata-mata pertukaran tatatanda.

Tensor antisimetri. Tensor kovarian atau kontravarian beragra kedua, ketiga, atau keempat (tiadalah yang lebih daripada ini yang tidak kosongnya) dikatakan anti-simetri, tensor anti-simetri, jika dua komponen, yang diperoleh satu daripada yang lain dengan saling bertukar dua indeks, adalah sama dan berlawanan tanda. Oleh sebab itu tensor $A_{\mu\nu}$, atau $A^{\mu\nu}$ antisimetri, jika sentiasalah masing-masingnya

$$A^{\mu\nu} = - A^{\nu\mu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

atau,

$$A_{\mu\nu} = - A_{\nu\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15a)$$

Daripada enam belas komponen $A^{\mu\nu}$ itu, empat komponen daripada $A^{\mu\mu}$ lenyap; selainnya sama dan berlawanan dengan tandanya mengikut pasangan, sehinggalah ada hanya enam komponen yang berbeza secara berangkanya. (vektor-enam). Begitu jugalah halnya dengan kita melihat tensor antisimetri beragra ketiga $A^{\mu\nu\sigma}$ ada hanya empat komponen yang berbeza secara berangkanya, sementara tensor antisimetri $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ ada hanya satu. Tiadalah tensor anti-simetri beragra lebih tinggi daripada keempat di dalam kontinum empat matra.

§ 7. PENDARABAN TENSOR

Pendaraban Terkeluar Tensor. Kita beroleh tensor beragra $n+m$ daripada komponen tensor beragra n dan tensor beragra m komponen dengan mendarabkan setiap komponen satu tensor itu dengan setiap komponen daripada tensor yang lagi satu. Pendaraban ini dinamai sebagai pendaraban terkeluar. Oleh yang demikian, misalnya, tensor T terbit daripada tensor A dan B daripada jenis yang berbeza:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\sigma} &= A_{\mu\nu}B_{\sigma}, \\ T^{\mu\nu\sigma\tau} &= A^{\mu\nu}B^{\sigma\tau}, \\ T^{\sigma\tau}_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu}B^{\sigma\nu}. \end{aligned}$$

Bukti watak tensor daripada T itu diberikan secara langsungnya oleh perwakilan (8), (10), (12), atau oleh hukum penjelmaan (9), (11), (13). Persamaan (8), (10), (12) itu adalah dengan sendirinya menjadi contoh daripada pendaraban terkeluar tensor beragra pertama.

"Pengecutan" Tensor Bercampur. Daripada barang tensor bercampur itu kita boleh membentuk tensor yang agranya kurang daripada terdahulunya sebanyak dua, dengan mempersamakan satu indeks kovarian dengan satu daripada watak kontravarian, dan menghasil-tambahkan terhadap indeks ini (itulah datangnya istilah "pengecutan"). Oleh yang demikian, contohnya daripada tensor bercampur beragra keempat A, kita beroleh tensor bercampur beragra kedua

$$A^{\tau}_{\nu} = A^{\mu\tau}_{\mu\nu} \quad \left(= \sum_{\mu} A^{\mu\tau}_{\mu\nu} \right),$$

dan daripada ini, dengan pengecutan kedua itu, maka kita beroleh tensor beragra kosong,

$$A = A^{\nu}_{\nu} = A^{\mu\nu}_{\mu\nu}.$$

Bukti bahawa hasil pengecutan itu sebenarnya memiliki watak tensor yang diberikan sama ada oleh perwakilan tensor mengikut sepatutnya dengan pengitlakan (12) dalam penggabungan dengan (6) , atau dengan pengitlakan (13).

Pendaraban Terkedalam dan Bercampur Tensor. Pendaraban jenis ini terdiri daripada gabungan pendaraban terkeluar dengan pengecutan

Contoh. Daripada tensor kovarian beragra kedua $A_{\mu\nu}$ dan tensor kontravarian beragra pertama B^{σ} itu kita boleh membentuk tensor bercampur dengan pendaraban terkeluar

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}B^{\sigma}.$$

Dengan pengecutan terhadap indeks ν dan σ, maka kita beroleh vektor-empat kovarian

$$D_\mu = D^{\nu}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}B^{\nu}.$$

Ini kami namai hasil darab terkedalam tensor $A_{\mu\nu}$ dan B^{σ}. Secara analoginya, kita boleh membentuk kuantiti daripada tensor $A_{\mu\nu}$ dan $B^{\sigma\tau}$, dengan pendaraban terkeluar dan pengecutan berganda, hasil darab terkedalam $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$. Dengan pendaraban terkeluar dan satu pengecutan itu, kita beroleh daripada $A_{\mu\nu}$ dan $B^{\sigma\tau}$ tensor bercampur beragra kedua $D^{\tau}_{\nu} = A_{\mu\nu}\, B^{\nu\tau}$. Operasi ini boleh dicirikan dengan layaknya sebagai satu operasi bercampur, kerana kejadian "terkeluar" terhadap indeks μ dan τ, dan "terkedalam" terhadap indeks ν dan σ .

Kami sekarang mahu membuktikan usulan yang sering berguna sebagai dalil watak tensor. Daripada perkara yang baru sahaja dijelaskan tadi, $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ ialah skalar jika $A_{\mu\nu}$ dan $B^{\sigma\tau}$ tensor. Akan tetapi kita boleh juga buat tegasan yang berikut: Jika $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ skalar untuk barang pilihan tensor $B^{\mu\nu}$, maka $A_{\mu\nu}$ berwatak tensor. Sebabnya, dengan hipotesis, untuk barang pergantian, kita beroleh

$$A'_{\sigma\tau}B'^{\sigma\tau} = A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.$$

Akan tetapi, dengan songsangan (9), maka diperoleh

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}B'^{\sigma\tau}.$$

Ini, jika disematkan di dalam persamaan di atas, memberikan

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}A_{\mu\nu}\right)B'^{\sigma\tau} = 0.$$

Ini hanya boleh dipenuhi bagi nilai sembarang $B'^{\sigma\tau}$ jika kurungan itu lenyap. Dengan itu, terbitlah hasilnya, persamaan (11). Petua ini berlaku secara sepadannya kepada tensor barang agra dan watak, dan buktinya seanalog untuk semua kes.

Petua itu boleh juga ditunjukkan dalam bentuk ini: Jika B^{μ} dan C^{ν} barang vektor, dan jika , untuk semua nilai ini, maka hasil darab tekedalam $A_{\mu\nu}B^{\mu}C^{\nu}$ ialah skalar, maka $A_{\mu\nu}$ ialah tensor kovarian. Usulan terkemudian ini juga sah berlaku dengan baiknya sekalipun jika hanya tegasan yang lebih khas lagi adalah betul; iaitu barang pilihan vektor-empat B^{μ}, hasil darab terkedalam $A_{\mu\nu}B^{\mu}B^{\nu}$ ialah skalar, jika tambahan pula diketahui bahawa $A_{\mu\nu}$ memenuhi syarat simetri $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. Sebabnya, dengan kaedah yang dipaparkan di atas, kita buktikan watak tensor bagi $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$, dan daripada ini watak tensor bagi $A_{\mu\nu}$ mengekori dengan mengambil kira simetri. Ini juga boleh diitlakkan dengan mudahnya kepada kes tensor kovarian dan kontravarian barang agra.

Akhirnya, pengekoran perkara yang sudah dibuktikan itu terbitlah hukum yang berikut ini, yang juga boleh diletak untuk barang tensor: Jika untuk barang pilihan daripada vektor-empat B^ν kuantiti $A_{\mu\nu}B^\nu$ membentuk sebuah tensor beragra pertama, maka A ialah tensor beragra kedua. Sebabnya, jika C^μ ialah barang vektor-empat, maka dengan mengambil kira watak tensor $A_{\mu\nu}B^\nu$, maka hasil darab terkedalam $A_{\mu\nu}B^\nu C^\mu$ ialah skalar untuk barang pilihan daripada dua vektor-empat B^ν dan C^μ. Daripada inilah terjadinya usulan itu.

§ 8. SETENGAH ASPEK DARIPADA TENSOR ASASI $g_{\mu\nu}$

Tensor Asasi Kovarian. Dalam ungkapan invarian untuk kuasa dua unsur gegaris,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu$$

bahagian yang diperani dx^μ itu ialah sebagai vektor kontravarian yang boleh dipilih sesuka hati. Oleh sebab selanjutnya *g* itu simetri, maka berikutannya daripada pertimbangan perenggan yang lepas itu $g_{\mu\nu}$ ialah tensor kovarian beragra kedua. Kami menamainya sebagai "tensor asasi." Seterusnya kami mendeduksikan setengah sifat tensor ini yang, benarlah, berlaku pada barang tensor beragra kedua. Akan tetapi, oleh sebab tensor asasi berperanan khas dalam teori kami, yang ada asas fiziknya dalam kesan kegravitian yang pelik, maka hubungan yang akan dibangunkan itu adalah penting pada kita hanya dalam kes tensor asasi.

Tensor Asasi Kontravarian. Jika dalam penentu yang terbentuk daripada unsur $g_{\mu\nu}$, kita ambil kofaktor daripada setiap daripada $g_{\mu\nu}$ dan membahagikannya dengan penentu $g = |g_{\mu\nu}|$, maka kita akan beroleh kuantiti pasti $g_{\mu\nu}$ ($=g_{\nu\mu}$) yang, sebagaimana yang akan ditunjukkan nanti, membentuk tensor kontravarian.

Dengan pengetahuan sifat penentu,

$$g_{\mu\sigma}\, g^{\nu\sigma} = \delta^\nu{}_\mu \qquad (16)$$

yang simbol $\delta^\nu{}_\mu$ menandakan 1 atau 0 , mengikut $\mu = \nu$ atau $\mu \neq \nu$. Ganti ungkapan di atas untuk ds^2, oleh yang demikian kita boleh tulis

$$g_{\mu\sigma}\delta^\sigma{}_\nu\, dx_\mu\, dx_\nu$$

atau , dengan (16)

$$ds^2 = g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\tau}\, g^{\sigma\tau}\, dx_\mu\, dx_\nu \qquad (16a)$$

akan tetapi dengan petua pendaraban di perenggan yang lepas , kuantiti

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}\, dx_\mu$$

membentuk vektor-empat kovarian, dan malah satu vektor sembarangan, kerana dx_μ adalah sembarangan. Dengan memperkenalkan ini ke dalam ungkapan (16a), maka kami beroleh

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}\, d\xi_\sigma\, d\xi_\tau$$

oleh sebab, dengan pilihan sembarangan bagi vektor $d\xi_\sigma$, ini adalah skalar, dengan takrifnya $g^{\sigma\tau}$ adalah simetri terhadap indeks σ dan τ, maka ekorannya, daripada hasil-hasil di dalam perenggan sebelumnya, $g^{\sigma\tau}$ itu pun ialah tensor kontravarian.
Selanjutnya daripada (16) itu $\delta^\nu{}_\mu$ itu adalah tensor, yang kami namainya sebagai tensor asasi bercampur.

Penentu Tensor Asasi – Menerusi petua pendaraban penentu,

$$|g_{\mu\sigma}\, g^{\sigma\nu}| = |g_{\mu\sigma}| \times |g^{\sigma\nu}|$$

Bagi pihak lain lagi

$$|g_{\mu\sigma}\, g^{\sigma\nu}| = |\,\delta^\nu{}_\mu| = 1$$

Oleh Sebab itu berikutannya

$$|g_{\mu\nu}| \times |g^{\mu\nu}| = 1 \qquad (17)$$

Skalar Isipadu. Pertamanya kami mencari hukum penjelmaan penentu $g = |g_{\mu\nu}|$. Bertepatan dengan (11)

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right| .$$

Oleh yang demikian, menerusi penerapan berganda bagi petua pendaraban penentu, ekorannya ialah

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \cdot \left| \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} \right| \cdot |\, g_{\mu\nu} \,| = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right|^2 g,$$

atau

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \sqrt{g}.$$

Bagi pihak lain, hukum penjelmaan unsur isipadu

$$d\tau = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

ialah, bertepatan dengan teorem Jakobi,

$$d\tau' = \left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| d\tau.$$

Menerusi pendaraban dua persamaan terakhir itu, maka kami beroleh

$$\sqrt{g'}\, d\tau' = \sqrt{g}\, d\tau \qquad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Sebagai ganti √(*g*), kami memperkenalkan kuantiti yang mengekorinya √(-*g*), yang sentiasa nyata atas sebab watak hiperbolik kontinum ruang-masa. Invarian √(-*g*) dτ adalah sama dengan magnitud unsur empat-matra daripada isipadu dalam sistem rujukan "tempatan" sebagaimana yang disukat dengan batang tegar dan jam mengikut pengertian teori kenisbian khas.

Catatan Berkenaan dengan Watak Kontinum Ruang-Masa. Anggapan kami bahawa teori kenisbian khas itu sentiasa boleh diterapkan ke rantau kecil tak terpermanai yang mengimplikasikan bahawa ds^2 sentiasa boleh diungkapkan mengikut sepersetujuan dengan (1) menerusi kuantiti nyata $dX_1 \ldots dX_4$. Jika kita lambangkan $d\tau_0$ unsur isipadu "tabii" dX_1, dX_2, dX_3, dX_4 , maka

$$d\tau_0 = \sqrt{-g}\, d\tau \qquad . \quad . \quad . \quad (18a)$$

Jika √(-*g*) lenyap pada titik kontinum empat-matra, maka maknanya pada takat ini, isipadu "tabii" yang kecil tak terpermanai itu akan sepadan dengan isipadu terpermanai dalam koordinat. Marilah kita anggap kes ini tidak pernah berlaku. Oleh itu, *g* tidak boleh berubah isyarat. Kami akan anggap bahawa mengikut pengertian teori kenisbian khas itu, *g* sentiasa bernilai negatif terpermanai. Ini adalah hipotesis kepada alam tabii jasmani bagi kontinum yang sedang dipertimbangkan, dan pada masa yang sama satu kelaziman dalam pemilihan koordinat.

Akan tetapi jika (–*g*) sentiasa terpermanai dan positif, maka bersahajalah untuk bersetuju memilih koordinat *a posteriori* sedemikian rupa sehingga kuantiti itu sentiasa sama dengan keesaan. Kita akan lihat nanti yang sekatan sedemikian itu ke atas pilihan koordinat untuk memungkinkan kita mencapai pensimpelan mustahak bagi hukum alam tabii.

Bagi menggantikan (18), kita ada dτ′ = dτ, yang daripadanya, dengan sebab teorem Jakobi, maka berikutan dengannya itu

$$\left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| = 1 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Oleh yang demikian, dengan pilihan koordinat ini, satu-satunya pergantian yang memungkinkan terjadinya keadaan itu ialah esanya penentu itu.

Akan tetapi tersalahlah mempercayai langkah ini mengindikasikan pengabaian separa terhadap postulat am kenisbian. Kami tidak bertanya "Apakah hukum alam tabii yang kovarian dalam menghadapi semua pergantian yang menjadikan penentu itu adalah keesaan?" tetapi soalan kami ialah "Apakah hukum alam tabii yang kovarian pada amnya?" Tidaklah sehingga kami memformulasi perkara ini, maka barulah kami mensimpelkan ungkapannya dengan pilihan khusus sistem rujukan.

Pembentukan Tensor Baru Menerusi Tensor Asasi. Pendaraban terkedalam, terkeluar, dan bercampur bagi tensor dengan tensor asasi memberikan tensor-tensor yang berbeza watak dan agranya. Contohnya,

$$A^{\mu} = g^{\mu\sigma}A_{\sigma},$$
$$A = g_{\mu\nu}A^{\mu\nu}.$$

Bentuk-bentuk yang berikut terutamanya, bolehlah dicatatkan:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\alpha\beta},$$
$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}A^{\alpha\beta}$$

(masing-masingnya "pelengkap" tensor kovarian dan kontravarian), dan

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}.$$

Kami namai $B_{\mu\nu}$ tensor terturun yang disekutukan dengan $A_{\mu\nu}$. Serupalah juga dengan

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}.$$

Bolehlah dicatatkan bahawa $g^{\mu\nu}$ tidaklah lebih daripada pelengkap $g_{\mu\nu}$, sebab

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha}\delta_{\alpha}^{\nu} = g^{\mu\nu}.$$

[BERSAMBUNG dalam isu yang akan datang — penterjemah]

NOTA

[1] Tentunya satu jawaban boleh jadi memuaskan daripada sudut pandangan epistemologi, dan masih tidak berasas secara fiziknya, jika jawaban itu berkonflik dengan ujikaji lain.
[2] Eotvos membuktikan secara ujikaji bahawa medan graviti bersifat sebegini dengan kejituan yang hebat
[3] Kami anggap kemungkinan mentahkik "keserentakan" bagi peristiwa yang proksimat serta-merta di dalam ruang, atau — menyatakan dengan secara yang lebih persis lagi – untuk keproksimatan yang serta-merta atau kebersekenaan di dalam ruang-masa, tanpa pemberian takrif konsep asasi ini.
[4] Unit masa hendak dipilih sehinggakan halaju cahaya di dalam *vakuo* sebagaimana yang disukat di dalam sistem ko-ordinat "setempat" adalah hendak disamakan dengan keesaan [nilainya satu].

Sumber asal: T*he Foundation of the General Theory of Relativity,* oleh Alfred Engel dalam *Collected Papers of Albert Einstein* (Vol. 6). Princeton University Press, 1997: 146-200 yang berupa terjemahan kepada karya asal Einstein dalam bahasa Jerman, *Die Grundlage der algemeinen Relativitatstheori. Annalen der Physik IV Folg 1916* (49): 769-822. Kedua-duanya dalam daripada *http://www.alberteinstein.info/gallery/gtext3.html*

Penterjemah: Shaharir b.M.Z., Ph D
Mantan Profesor Matematik fizik UKM dan
Mantan Profesor Matematik UMT
No. 11, Jln 3 / 4
43600 Bandar Baru Bangi
Selangor DE.

Emel: riramzain@yahoo.com